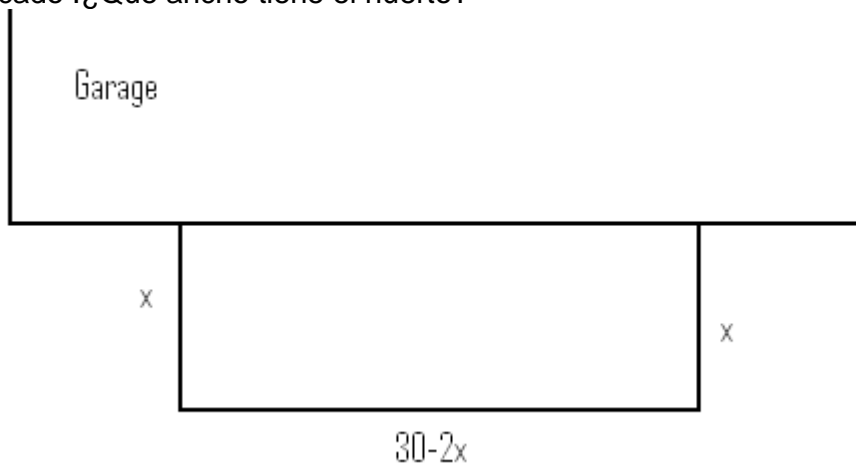




## Conceptos previos

La factorización en la resolución de problemas. Con la habilidad para resolver ecuaciones polinomiales por factorización se pueden resolver problemas que se habrían esquivado hasta ahora. Se deben rechazar soluciones que no sean sensatas a la luz de las condiciones del Problema.

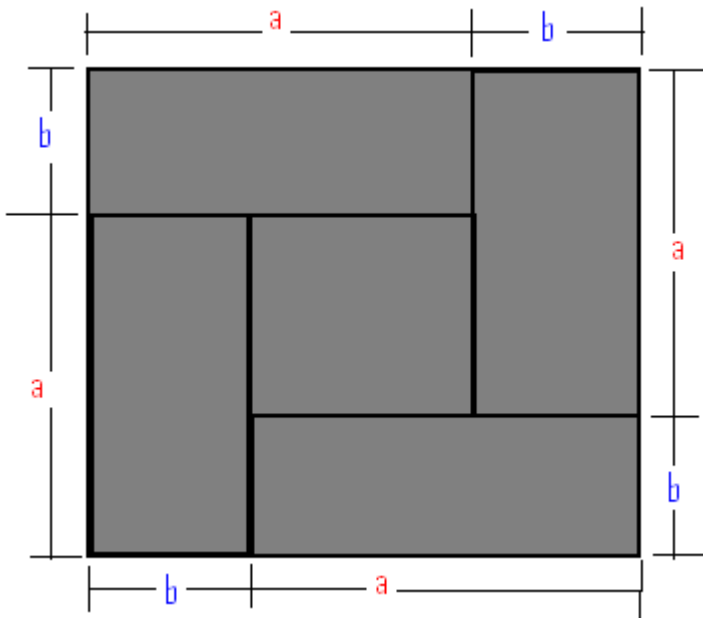
Ejemplo 1.- El señor Pérez desea iniciar el cultivo de un huerto de vegetales de  $100 \text{ m}^2$ . Puesto que tiene solo  $30 \text{ mts}$  de cerca de alambre, solo cerca tres lados de un rectángulo y utiliza la pared de su garaje como cuarto lado cercado. ¿Que ancho tiene el huerto?



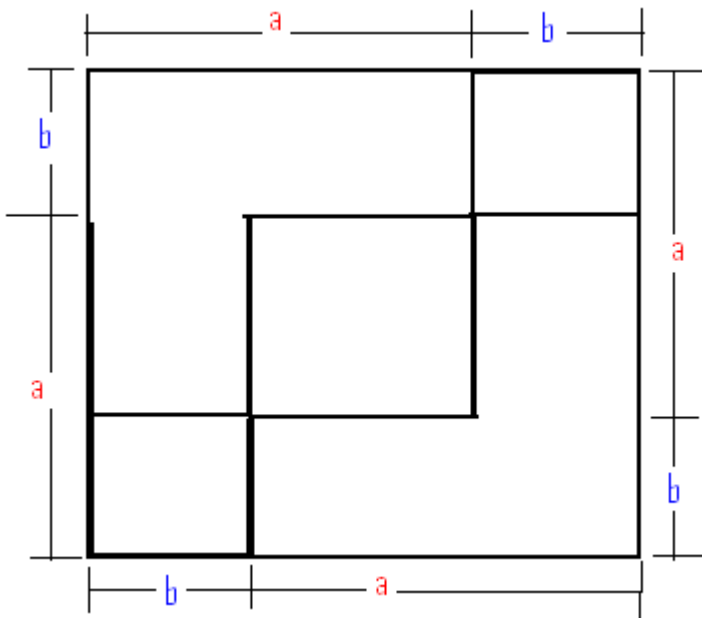
Ejemplo 2.- este problema tiene solo una solución, aunque la ecuación cuadrática usada para resolverlo tiene dos raíces. El problema es interesante también porque usa un modelo matemático muy importante  $d = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ , donde  $V_0$  velocidad con que empieza la caída,  $d$  numero de metros de la caída,  $t$  numero de segundos hasta que el objeto golpea el suelo,  $g$  aceleración de gravedad que equivale a  $9,8 \text{ m/seg.}^2$ . El problema a resolver es:

Se lanza un objeto directamente hacia abajo desde un avión a  $2.940 \text{ mts}$  sobre el suelo. Inicia la caída a  $49 \text{ m/s}$ . ¿Cuántos segundos transcurren hasta el instante en que el objeto golpea el suelo?.

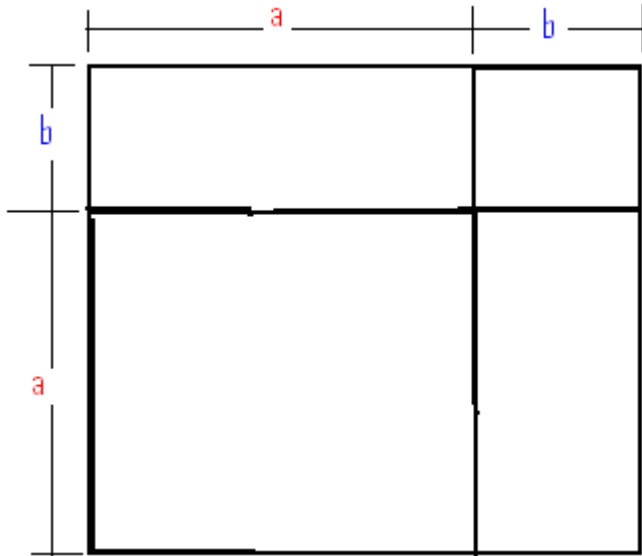
3.- en la fig. Demostrar que:  $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ .



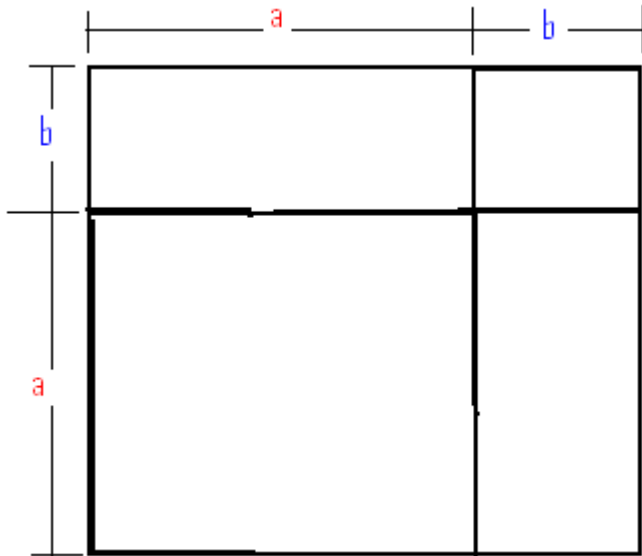
4.- En la fig. Demostrar que:  $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$



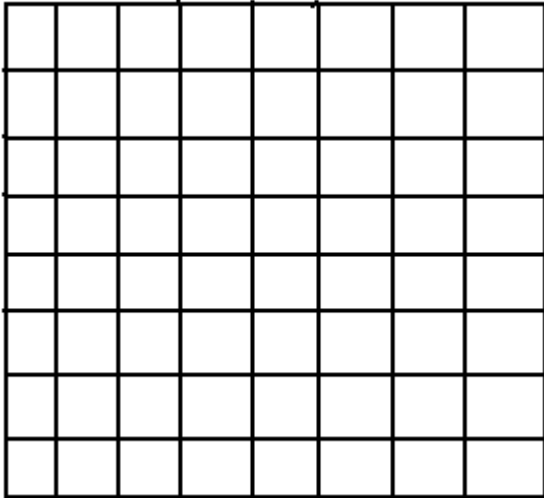
5.- En la fig. Demostrar que:  $(a+b)^2 - b^2 = a^2 + 2ab$



6.- En la fig. Demostrar que:  $a^2 - (a-b)^2 = 2ab - b^2$



7.- Apoyándose en la Fig. , pruebe que:  $1+2+3+4+5+6+7+8 = \frac{8 \times 9}{2}$



8.- Por el mismo método demostrar que para cualquier entero positivo  $n$ , se verifica que:

$$1+2+3+4+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

9.- Usar la fig. Anterior para demostrar que:  $1+3+5+7+9+11+13+15 = 8^2$

10.- Por el mismo método demostrar que para cualquier entero positivo  $n$ , se verifica:

$$1+3+5+7+\dots+(2n-1) = n^2$$

**FATORIZACION:**

**CASO 1: FACTOR COMUN MONOMIO:** Hay un factor común para cada término (Máximo común divisor para todos los términos)

Ejemplo:  $24a^3b^4x + 18a^2b^3xy - 30a^4b^2yz = 6a^2b^2(4b^2 + 3bxy - 5a^2yz)$

**CASO 2: FACTOR COMUN POLINOMIO:** El factor común en este caso es un polinomio:

Ejemplo:  $4a(2x+y) + 3b^2y(2x+y) - 2x-y = 4a(2x+y) + 3b^2y(2x+y) - 1(2x+y)$   
 $= (2x+y)(4a + 3b^2y - 1)$

**CASO 3: FACTOR COMUN POR AGRUPACION DE TERMINOS:** Es una combinación de los dos casos anteriores, también se puede aplicar a las factorizaciones notables como se vera mas adelante:

**FACTORIZACIONES NOTABLES.**

**TRINOMIO CUADRADO PERFECTO:** Corresponde al desarrollo de un cuadrado de binomio:

$$A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$$

Ejemplo:  $4a^4b^2 - 12a^2bx + 9x^2 = (2a^2b - 3x)^2$

**DIFERENCIA DE CUADRADOS PERFECTOS:** Corresponde al desarrollo de una suma por su diferencia  $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$

Ejemplo:  $196x^4y^2 - 225z^6 = (14x^2y + 15z^3)(14x^2y - 15z^3)$

**COMBINACION DE LA DIFERENCIA DE CUADRADOS Y EL TRINOMIO CUADRADO PERFECTO:** Es un simple caso de agrupación:

Ejemplo:  $m^2 + 2mn + n^2 - b^4 = (m^2 + 2mn + n^2) - b^4 = (m+n)^2 - b^4 = (m+n+b^2)(m+n-b^2)$

**TRINOMIO CUADRADO PERFECTO POR SUMA Y RESTA:** Hay que sumar y restar la misma cantidad para completar el trinomio cuadrado perfecto, transformándose luego en el caso anterior:

Ejemplo:  $49m^4 - 151m^2n^4 + 81n^8$ , en este caso como la raíz cuadrada del primer termino es  $\sqrt{49m^4} = 7m^2$  y la del tercer termino (previamente ordenado por la potencia) es  $\sqrt{81n^8} = 9n^4$  y cuyo doble producto corresponde a  $2 \times 7m^2 \times 9n^4 = 126m^2n^4$ , que es lo que correspondería al segundo termino del trinomio cuadrado perfecto y no  $151m^2n^4$  como se expresa en el problema, por lo tanto habrá que sumar y restar la diferencia entre  $151m^2n^4$  y  $126m^2n^4$ , esto es:  $151m^2n^4 - 126m^2n^4 = 25m^2n^4$ . Si se dispone el ejercicio de la forma:

$$\begin{array}{r}
 + \quad \frac{49m^4 - 151m^2n^4 + 81n^8}{+ 25m^2n^4} - 25m^2n^4 \\
 (49m^4 - 126m^2n^4 + 81n^8) - 25m^2n^4 \\
 (7m^2 - 9n^4)^2 - 25m^2n^4 \\
 \boxed{(7m^2 - 9n^4 + 5mn^2)(7m^2 - 9n^4 - 5mn^2)}
 \end{array}$$

**FACTORIZACION DE UNA SUMA DE DOS CUADRADOS:** Esta es una variación del caso anterior, solo que aquí lo que hay que sumar y restar es el segundo término entero para completar el trinomio cuadrado perfecto:

Ejemplo  $x^4 - 64y^8$ , el segundo término del trinomio será entonces  $2 \times x^2 \times 8y^4 = 16x^2y^4$ , resultando de acuerdo al esquema anterior:

$$\begin{aligned}
 & + \frac{x^4 \quad - 64y^8}{+ 16x^2y^4 \quad - 16x^2y^4} \\
 & (x^4 + 16x^2y^4 - 64y^8) - 16x^2y^4 \\
 & (x^2 + 8y^4)^2 - 16x^2y^4 \\
 & \boxed{(x^2 + 8y^4 + 4xy^2)(x^2 + 8y^4 - 4xy^2)}
 \end{aligned}$$

**FACTORIZACION DE UN TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO DE LA FORMA:**  
 $X^2 + BX + C$

En este caso el trinomio se descompone en el producto de dos binomios. Ambos contienen como primer termino la raíz cuadrada del primer término del trinomio (X) y el segundo término corresponde a un par de números o factores cuyo producto da el tercer término del trinomio (C) y al mismo tiempo la suma debe dar el coeficiente del segundo término del trinomio (B)

EJEMPLO:

$$a^4 - 2a^2b - 15b^2 = (a^2 - 5b)(a^2 + 3b) \quad (\text{¡PIENSE EN EL PROCESO INVERSO DE MULTIPLICAR!})$$

**FACTORIZACION DEL TRINOMIO GENERAL DE SEGUNDO GRADO:**

TIENE LA FORMA:  $AX^{2n} + BX^n + C$ . Se factoriza aplicando el caso anterior, por amplificación y simplificación simultanea por el mismo factor A.

Ejemplo:

$$3a^2 + 7a - 6$$

Si disponemos el proceso del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 & 3a^2 + 7a - 6 \quad / \quad \text{amplificando por } 3 \\
 & (3a)^2 + 7(3a) - 6 \\
 & (3a + 6)(3a - 1) \quad \text{Factorizando el primer factor} \\
 & 3(a + 2)(3a - 1) \quad \text{Ahora simplificando por } 3, \text{ se tiene:} \\
 & \frac{3(a + 2)(3a - 1)}{3} \quad \text{finalmente se obtiene: } (a + 2)(3a - 1)
 \end{aligned}$$

**FACTORIZACION DE UNA EXPRESION CUYO DESARROLLO**

**CORRESPONDE A EL CUBO DE UN BINOMIO**. Corresponde al proceso inverso del desarrollo del cubo del binomio. Esto es:

$$A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3 = (A \pm B)^3$$

**EJEMPLO:**  $8x^6 + 54x^2y^6 - 27y^9 - 36x^4y^3$ , es un cubo de binomio. Ordenando la expresión se tiene:  $8x^6 - 36x^4y^3 + 54x^2y^6 - 27y^9 = (x^2 - 3y^3)^3$

**FACTORIZACION DE UNA SUMA O RESTA DE CUBOS PERFECTOS:**

$$A^3 \pm B^3 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$$

Ejemplo:  $8x^6 - 27 = (2x^2 - 3)(4x^2 + 6x^2 + 9)$

**OTROS CASO DE FACTORIZACION:**

I:  $A^n - B^n$  : ES DIVISIBLE POR A-B SIENDO n PAR O IMPAR

II:  $A^n + B^n$  : ES DIVISIBLE POR A+B SIENDO n IMPAR

III:  $A^n - B^n$  : ES DIVISIBLE POR A+B SIENDO n PAR

IV:  $A^n + B^n$  : NUNCA ES DIVISIBLE POR A-B

**EJERCICIOS.**

1.-  $5a^2 + a$

2.-  $m^2 + 2mx + x^2$

3.-  $a^2 + a - ab - b$

4.-  $x^2 - 36$

5.-  $9x^2 - 6xy + y^2$

6.-  $x^2 - 3x - 4$

7.-  $6x^2 - x - 2$

8.-  $1 + x^3$

9.-  $27x^3 - 1$

10.-  $x^5 + m^5$

11.-  $a^3 - 3a^2b + 5ab^2$

12.-  $2xy - 6y + xz - 3z$

13.-  $1 - 4b + 4b^2$

14.-  $4x^4 + 3x^2y^2 + y^4$

15.-  $x^8 - 6x^4y^4 + y^8$

16.-  $a^2 - a - 30$

17.-  $15m^2 + 11m - 14$

18.-  $a^6 + 1$

19.-  $8m^3 - 27y^6$

20.-  $16a^2 - 24ab + 9b^2$

21.-  $8a^3 - 12a^2 + 6a - 1$

22.-  $1 - m^4$

23.-  $x^4 + 4x^2 - 21$

24.-  $a^2 + 2ab + b^2 - m^2$

25.-  $8a^2b + 16a^3b - 24a^2b^2$

26.-  $x^5 - x^4 + x - 1$

27.-  $6x^2 + 19x - 20$

28.-  $x^2 - a^2 + 2xy + y^2 + 2ab - b^2$

29.-  $a(x+1) - b(x+1) + c(x+1)$

30.-  $a^2 - d^2 + n^2 - c^2 - 2an - 2cd$

31.-  $1x^2 + 216x^9$

32.-  $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$

33.-  $ax - bx + b - a - by + ay$

34.-  $15 + 14x - 8x^2$

35.-  $2x(a-1) - a + 1$

36.-  $4a^{2n} - bx^{4n}$

37.-  $81x^2 - (a+x)^2$

38.-  $9x^2 - y^2 + 3x - y$

39.-  $x^2 - x - 72$

40.-  $36a^4 - 120a^2b^2 + 49b^4$

41.-  $81a^8 + 64b^{12}$

42.-  $(a+2)^2 - (a-3)^2$

43.-  $4a^2m + 12a^2n - 5bm - 15bn$

44.-  $1 - 9x^2 + 24xy - 16y^2$

45.-  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^6}{81}$

**DESCOMPONGA EN TRES FACTORES.**

1.-  $3ax^2 - 3a$

2.-  $3x^2 - 3x - 6$

3.-  $2a^2x - 4abx + 2b^2x$

4.-  $2a^3 - 2$

5.-  $a^3 - 3a - 28a$

6.-  $x^3 - 4x + x^2 - 4$

7.-  $4ab^2 - 4abn + an^2$

8.-  $x^4 - 3x^2 - 4$

9.-  $a^3 - a^2 - a + 1$

10.-  $6ax^2 - ax - 2a$

11.-  $28x^3y - 7xy^3$

12.-  $3abx^2 - 3abx - 18ab$

**DESCOMPONER EN CUATRO FACTORES.**

1.-  $1 - a^8$

2.-  $a^6 - 1$

3.-  $x^4 - 41x^2 + 400$

4.-  $a^4 - 2a^2b^2 + b^2$

5.-  $x^5 + x^3 - 2x$

6.-  $2x^4 + 6x^3 - 2x - 6$

7.-  $x^5 - x^3y^2 + x^2y^3 - y^5$

8.-  $a^4x^2 + a^2x - 6a^2 - x^2 - x + 6$

9.-  $3a^2m + 9am - 30m + 3a^2 + 9a - 30$

10.-  $a(x^3 + 1) + 3ax(x + 1)$

**DESCOMPONER EN CINCO FACTORES.**

1.-  $x^9 - xy^8$

2.-  $x^5 - 40x^3 + 144x$



$$3.- a^6 + a^3b^3 - a^4 - ab^3$$

$$4.- 4x^4 - 8x^2 + 4$$

$$5.- a^7 - ab^6$$

$$6.- 2a^4 - 2a^3 - 4a^2 - 2a^2b^2 + 2ab^2 + 4b^2$$

**DESCOMPONER EN SEIS FACTORES.**

$$1.- x^{17} - x$$

$$2.- 3x^6 - 75x^4 - 48x^2 + 1200$$

$$3.- a^6x^2 - x^2 + a^6x - x$$

$$4.- (a^2 - ax)(x^4 - 82x^2 + 81)$$